Экспериментальное задание 6

Определение параметров колебательной системы

Цель работы – изучить собственные колебания груза на пружине и определить коэффициент упругости пружины двумя способами.

Оборудование: пружина, груз известной массы, штатив, линейка.

Краткая теория

Колебания являются широко распространенным видом движения и наблюдаются в системах самой разнообразной природы. Колебания относятся к процессам точно или приблизительно повторяющимся через одинаковые промежутки времени. Эти процессы характеризуются изменяющимися во времени физическими величинами, определяющими состояние колебательной системы (в случае механических колебаний – координатой тела, проекцией его скорости и ускорения, а также потенциальной и кинетической энергий системы). Так, например, простейшей колебательной системой является пружинный маятник, который представляет собой грузик массой m, прикрепленный к пружине с коэффициентом упругости или жесткостью k (рис. 1). Пружину можно считать невесомой, а трение и сопротивление среды можно не учитывать.

При отклонении тела от положения равновесия на расстояние $x = x_{max}$ пружина растягивается, что приводит к созданию силы упругости $F_{упр}$. Сила упругости прямо пропорциональна смещению и стремится вернуть тело в исходное состояние, т.е. направлена против смещения тела x:

$$\vec{F}_{упр} = -k\vec{x} \text{ или } (F_{упр})_x = -kx. \quad (1)$$

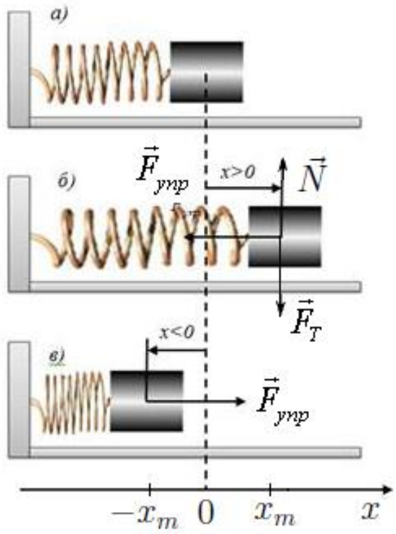

Рис. 1

Так как трение отсутствует, то работа силы упругости перейдет в кинетическую энергию тела, и тело вернется в положение равновесия ($x = 0$), имея некоторую скорость. Дальне тело по инерции пройдет положение равновесия и начнет отклоняться в другую сторону, сжимая пружину. Возрастающая при этом сила упругости тормозит тело до его полной остановки в точке $x = -x_{max}$, после чего процесс пойдет в обратном направлении. Так возникает колебательное движение.

Для количественного описания процесса используем второй закон Ньютона. Согласно ему, произведение массы тела на его ускорение равно равнодействующей всех сил, приложенных к телу (силы тяжести F_T, силы реакции опоры N и силы упругости $F_{упр}$):

$$m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{упр}. \quad (2)$$

В проекциях на координатную ось Ox получается уравнение:

$$ma_x = -kx \text{ или } a_x = -\frac{k}{m}x. \quad (3)$$

Уравнение, описывающее свободные механические колебания в любой системе, в которой действуют только консервативные силы, имеет вид:

$$a_x = -\omega_0^2 x. \quad (4)$$

Решить такое уравнение, значит найти x как функцию времени t, т.е. определить какие значения координаты x имеет тело в разные моменты времени t:

$$x(t) = x_{\max} \cdot \cos\omega_0 t \text{ или } x(t) = x_{\max} \cdot \sin\omega_0 t \quad (5)$$

Выбор функции *cos* или *sin* определяется начальными условиями возбуждения колебаний.

Сравнение формул (3) и (4) позволяет определить циклическую частоту колебаний пружинного маятника через параметры данной колебательной системы (m – масса грузика, k – жесткость пружины):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{6}$$

Связь между временем одного полного колебания (периода T) и циклической частотой колебаний ω_0 определяет выражение:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{7}$$

Из формулы (7) видно, что с увеличением жесткости пружины k период колебаний T уменьшается. Увеличение массы m увеличивает период.

Формула (7) позволяет получить формулу для определения жесткости пружины:

$$k = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2}, \; T = \frac{t}{N}, \tag{8}$$

где t – промежуток времени, в течении которого груз совершает N колебаний.

Следует отметить, что сила тяжести не оказывает никакого явления на характер колебаний груза на пружине. Период колебаний данного груза на пружине будет таким же, если расположить пружину вертикально.

Подвешивание груза приведет к увеличению длины пружины на $x = \Delta l = l - l_0$, где l_0 – длина пружины до деформации, l – длина деформированной пружины. Пружина растягивается до тех пор, пока сила упругости, возникающая при деформации пружины, не станет равной по модулю силе тяжести:

$$F_{упр} = F_T \text{ или } k\Delta l = mg \tag{9}$$

Следовательно, жесткость пружины можно также определить по формуле:

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{mg}{x}. \tag{10}$$

I. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка представляет собой пружину с грузиком, подвешенную на штативе. Схема ее аналогична той, что представлена на рисунке 1, с тем различием, что пружина располагается вертикально.

II. Рекомендации по проведению эксперимента и обработке его результатов

1. Сначала измерьте 5 раз удлинение пружины при подвешивании груза известной массы и рассчитайте среднее значение удлинения пружины:

$$x_{ср} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_5}{5}.$$

2. Определите абсолютную погрешность измерения деформации пружины по формуле:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сист}^2 + \Delta x_{случ}^2},$$

$$\Delta x_{сист} = \frac{c}{2}, \; \Delta x_{случ} = t_{CT} \cdot \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(x_{ср} - x_i\right)^2}.$$

3. Определите жесткость пружины, используя формулу (10).
4. Определите относительную погрешность измерения жесткости пружины по формуле:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x_{ср}}\right)^2} = \frac{\Delta x}{x_{ср}},$$

5. Рассчитайте абсолютную погрешность измерения жесткости пружины по формуле:

$$\Delta k_1 = \varepsilon \cdot k_1.$$

6. Далее измерьте 5 раз промежуток времени, в течение которого совершается N = 10 колебаний, и рассчитайте среднее значение периода колебаний:

$$T_{ср} = \frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_5}{5}.$$

7. Определите абсолютную погрешность измерения периода колебаний по формуле:

$$\Delta T = \sqrt{\Delta T_{сист}^2 + \Delta T_{случ}^2},$$

$$\Delta T_{сист} = \frac{c}{2},\ \Delta T_{случ} = t_{CT} \cdot \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(T_{ср} - T_i\right)^2}.$$

8. Определите жесткость пружины, используя формулу (8).
9. Определите относительную погрешность измерения жесткости пружины по формуле:

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\left(-2\frac{\Delta T}{T_{ср}}\right)^2} = \sqrt{2}\frac{\Delta T}{T_{ср}},$$

10. Рассчитайте абсолютную погрешность измерения жесткости пружины по формуле:

$$\Delta k_2 = \varepsilon \cdot k_2.$$

11. Сравните жесткость пружины, которую определили в двух опытах, сделайте вывод.

Таблица 1

Определение жесткости пружины первым способом (используя первый закон Ньютона)

№	m, кг	l_0, м	l, м	x, м	$x_{ср}$, м	k, Н/м	Δk, Н/м	ε, %
1								
2								
3								
4								
5								

Таблица 2

Определение жесткости пружины вторым способом
(используя формулу периода колебаний пружинного маятника)

№	N	t, с	T, с	$T_{ср}$, с	k, Н/м	Δk, Н/м	ε, %
1							
2							
3							
4							
5							

Контрольные вопросы

1. Если наблюдать свободные колебания маятника (пружинного или математического) в течение длительного промежутка времени в разных средах, то можно заметить уменьшение амплитуды его колебаний (рис. 2). Чем вызвано различие в характере затуханий колебаний в случаях *а* и *б*?

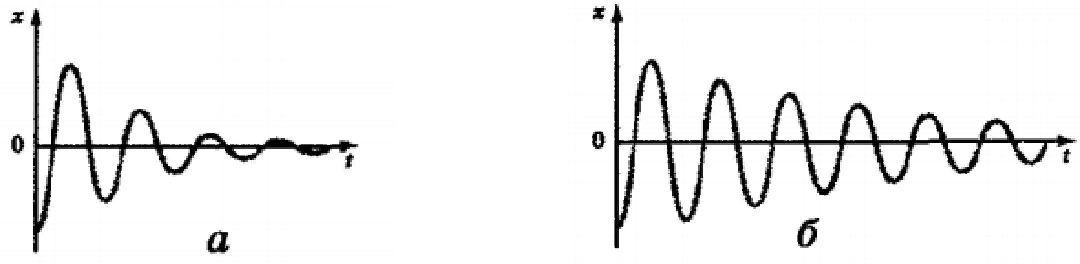

Рис. 2

2. Запишите закон колебательного движения грузика на пружине $x(t)$ в опыте согласно формуле (5).
3. Чему равен период колебаний кинетической энергии грузика массой m и пружины жесткостью k в проведенном эксперименте? Почему?